

Profesor: Isaías Correa M.

Guía de "Números Complejos"

Ejercicio 1: Marque con una cruz todos los conjuntos numéricos a los cuales pertenecen las soluciones de las ecuaciones:

Ecuación	Resolución	N	Z	Q	I	R	Q*	C
$x - 3 = 1$								
$x + 2 = 1$								
$x \cdot 2 = -1$								
$x^2 - 2x = 0$								
$x^2 + 1 = 0$								
$x^2 + 1 = \sqrt{2}$								
$x^2 + x + 7 = 0$								

Como sabemos, en R no podemos resolver raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1 .

Para eso definimos el símbolo **i** para indicar un número tal que:

$$\boxed{i^2 = -1} \quad \text{ó} \quad \boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Teniendo en cuenta la igualdad a partir de la cual lo definimos, y que este número no es real, podemos usarlo para expresar las soluciones que no son reales de algunas ecuaciones.

Ej: $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -1$$

$x_1 = i$

$x_2 = -i$

Ya que: $i^2 + 1 = 0$ y $(-i)^2 + 1 = 0$

$x^2 + 2 = 0$

$$x^2 = -2$$

$x_1 = \sqrt{2} i$

$x_2 = -\sqrt{2} i$

Ya que: $(\sqrt{2} i)^2 + 2 = 0$ y $(-\sqrt{2} i)^2 + 2 = 0$

Ejercicio 2: Utilice el símbolo **i** para expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^2 + 5 = 0$

c) $x^2 - 10 = 2x^2$

d) $-x^2 - 9 = 0$

e) $9x^2 + 16 = 0$

f) $(x + 5)^2 = 10x$

g) $\frac{1}{x^2 + 4} - 1 = 1$

h) $(x - 2)(-x - 2) = 20$

i) $(x - 8)^2 = -16x$

j) $3(2 - 2x) = (x - 4)(x - 2)$

k) $(2x^2 - 1)^2 = (1 + 2x)(1 - 2x) - 1$

Ejercicio 3: Calcular las siguientes potencias:

a) $i^{127} =$

b) $i^{94} =$

c) $i^{33} \cdot i^{11} =$

d) $i^{44} =$

e) $(i^{12})^4 =$

f) $i^{2022} : i^3 =$

g) $i^{242} =$

h) $(i^3)^5 =$

i) $x + 1 = i^{27}$ $x=?$

j) $i^{69} =$

k) $(i^9)^{27} =$

l) $x - i = i^{-3}$ $x=?$

m) $i^3 \cdot i^7 \cdot i^{-2} =$

n) $2i^5 + 3i^6 + i^7 + 4i^8 =$

ñ) $i^{11} + i^{12} + \dots + i^{37} + i^{38} =$

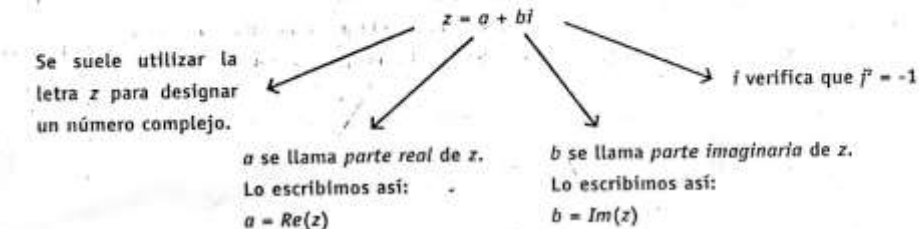
o) $i^{23} \cdot i^{24} \cdot i^{25} \dots i^{77} =$

p) $(i^5 - i^{17})(i^6 - i^{13} + i) =$

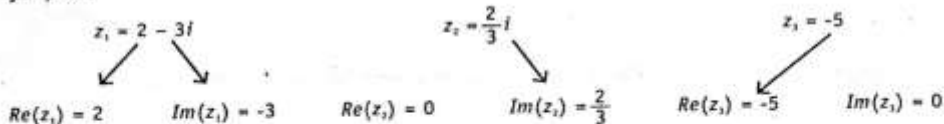
q) $i^{1253} - i^{2178} =$

Los números complejos

A los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, los llamamos *números complejos*.

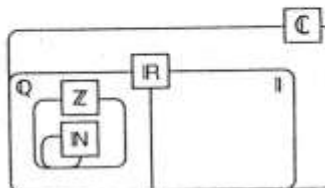


Ejemplos:



Al conjunto de todos los números complejos lo designamos con el símbolo \mathbb{C} , y está definido de forma tal que incluye a los números reales, representados por aquellos números complejos cuya parte imaginaria es nula.

Un número complejo no nulo como z , cuya parte real es nula, se llama *imaginario puro*.



Ejercicio 4: Complete la siguiente tabla:

Número Complejo Z	Parte Real $\text{Re}(z)$	Parte Imaginaria $\text{Im}(z)$	¿es complejo, real o imaginario puro?
$5 + 3i$			
	2	8	
	-4	$\frac{2}{3}$	
	1	-3	
$2 - \sqrt{3}i$			
$5i$			
	0	4	
	4	0	
	0	0	

CONJUGADO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

A partir de un número complejo $z = a + bi$, se definen los siguientes:

* El conjugado de z es $\bar{z} = a - bi$ (la parte real es igual y la parte imaginaria es opuesta)

* El opuesto de z es $-z = -a - bi$ (la parte real y la parte imaginaria son opuestas)

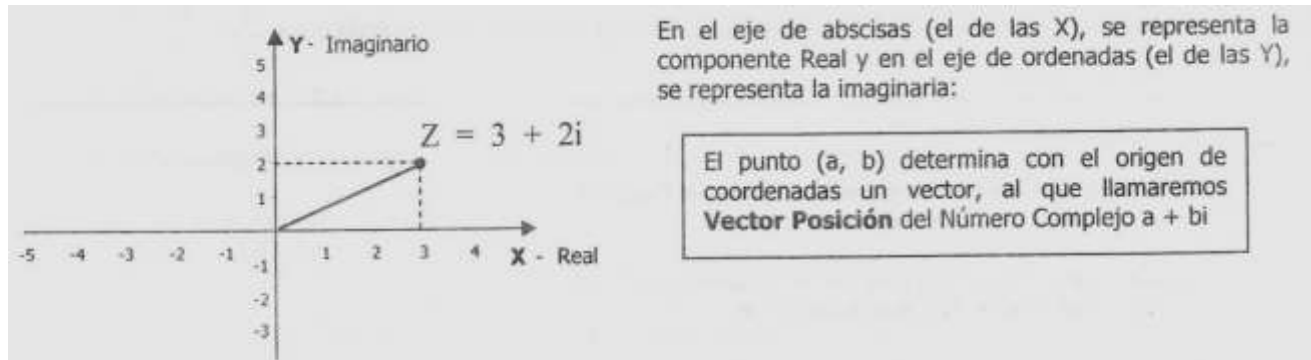
Ejemplos:

$z_1 = -1 - 2i$	$\bar{z}_1 = -1 + 2i$	$-z_1 = 1 + 2i$
$z_2 = 4i$	$\bar{z}_2 = -4i$	$-z_2 = -4i$
$z_3 = 6 - i$	$\bar{z}_3 = 6 - i$	$-z_3 = -6 + i$

Ejercicio 5: Si $z_1 = 2 + 5i$ $z_2 = i - 4$ $z_3 = -5$ $z_4 = 3i$, determine:

- 1) $-z_1 =$ 2) $\overline{z_3} =$ 3) $\overline{\overline{z_4}} =$ 4) $\overline{-z_2} =$ 5) $-\overline{z_2} =$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN N° COMPLEJO



Ejercicio 6: Representar los siguientes números complejos:

$z_1 = -1 - i$ $z_2 = -3 + 2i$ $z_3 = 2 - 3i$

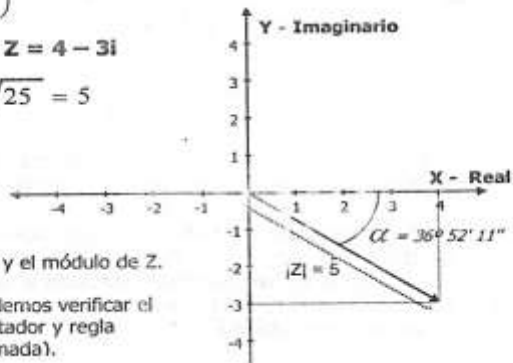
Ejercicio 7: Dado $z = 5 - 3i$, graficar $z, -z, \overline{z}, -\overline{z}$. ¿Qué relación existe entre ellos?

MÓDULO Y ARGUMENTO

El Módulo de un Número Complejo $z = a + bi$ es la longitud del Vector Posición.
El Módulo Se designa entre barras verticales $|Z|$ y se calcula usando el Teorema de Pitágoras: $Z = a + bi \Rightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
El Argumento (α) de un Complejo $z = a + bi$, es el ángulo que forma el eje (positivo) X con el Vector Posición de Z. Se calcula mediante la expresión: $Z = a + bi \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo: Calculamos el Módulo y el Argumento de $Z = 4 - 3i$

$Z = 4 - 3i \Rightarrow |Z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
 $Z = 4 - 3i \Rightarrow \alpha = \arctg\left(-\frac{3}{4}\right) = -36^\circ 52' 11''$



Y acá lo vemos todo graficado. Podemos ver el argumento y el módulo de Z.
 Nota. Si hacemos el dibujo a escala 1 unidad = 1 cm, podemos verificar el valor del argumento y módulo midiendo con transportador y regla respectivamente (obviamente en forma aproximada).

Ejercicio 8: Hallar el módulo y el argumento de los siguientes complejos y graficarlos:

- a) $5 - 2i$ b) $-3 + \frac{1}{2}i$ c) $\frac{2}{3} + i$ d) $-1 - i$

FORMAS DE REPRESENTAR UN NÚMERO COMPLEJO

* **Forma Binomial:** $z = 2 + 3i$

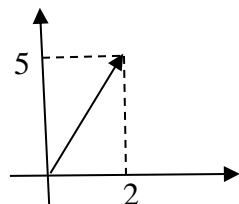
* **Forma Cartesiana:** $z = (2, 3)$

Ejercicio 9: Expresar los siguientes complejos en forma cartesiana:

- a) $z = -3i$ b) $z = -2 - 5i$ c) $z = -2i - 2$ d) $z = (-\sqrt{3} + \sqrt{2})$

Ejercicio 10: Expresar en forma binomial los siguientes n° complejos:

- a) (2,-3) b) (0,-1) c) (2/3 ; 0) d) (3, -7) e)



OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En los siguientes ejemplos pueden observar cómo sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números complejos:

Suma: $(2 + 3i) + (1 - 5i) = (2 + 1) + (3 - 5)i = 3 - 2i$

Resta: $(2 + 3i) - (1 - 5i) = (2 - 1) + (3 - (-5))i = 1 + 8i$

Multiplicación: $(2 + 3i) \cdot (1 - 5i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-5i) + 3i \cdot 1 + 3i \cdot (-5i) =$
 $= 2 - 10i + 3i - 15i^2 = 17 - 7i$
 (recordar que $i^2 = -1$)

División:

Para resolver la división de dos números complejos, siendo el divisor no nulo, multiplicamos a ambos por el conjugado del divisor, del siguiente modo:

$$\frac{2 + 3i}{1 - 5i} = \frac{2 + 3i}{1 - 5i} \cdot \frac{1 + 5i}{1 + 5i} = \frac{2 + 10i + 3i + 15i^2}{1^2 - (5i)^2} = \frac{-13 + 13i}{1 + 25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Multiplicar por una fracción de igual numerador y denominador es como multiplicar por 1, por lo tanto, la igualdad no se altera.

Ejercicio 11: Consideren los complejos: $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 + 5i$; $z_3 = 4 - i$ y resuelvan las siguientes operaciones:

- a) $z_1 + z_2 - z_3 =$ b) $z_1 + \overline{z_2} - z_3 =$ c) $\overline{z_1} - \overline{z_3} =$ d) $5 \cdot z_3 =$
 e) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 =$ f) $(-\overline{z_1} + \overline{z_2}) \cdot (\overline{z_1} - z_3) =$ g) $z_1 \cdot z_2 - z_3 =$ h) $(z_3)^2 =$

Ejercicio 12: Consideren los complejos: $z_1 = 3 - i$; $z_2 = -4i$; $z_3 = 7 + 2i$ y resuelvan las siguientes divisiones:

- a) $\frac{z_2}{z_1} =$ b) $\frac{z_1}{z_3} =$ c) $\frac{z_3}{z_2} =$ d) $\frac{z_2}{z_3} =$ e) $16 \cdot \frac{\overline{z_3}}{z_2} =$ f) $\frac{1}{z_1} =$

Ejercicio 13: Completen las potencias de i:

$i^0 =$ $i^1 =$ $i^2 =$ $i^3 =$
 $i^4 =$ $i^5 =$ $i^6 =$ $i^7 =$

¿Qué regularidad observan?

Ejercicio 14: Adición y Sustracción de Números Complejos:

- a) $(10 + 3i) + (8 + 2i) + (4 + 5i) =$ R: (22, 10)
 b) $(7 + 5i) - (3 - 4i) - (-5 + 2i) =$ R: (9, 7)
 c) $(1 + \frac{1}{2}i) + (3 - \frac{3}{2}i) + (-4 + i) =$ R: (0)
 d) $(-8 + \frac{3}{5}i) + (-\frac{7}{4} + \frac{7}{10}i) + (-\frac{1}{4} - \frac{3}{10}i) =$ R: (-10 + i)
 e) $(\frac{2}{5} + i) + (\frac{4}{3} - \frac{3}{4}i) + (\frac{2}{15} + \frac{1}{4}i) + (-\frac{28}{15} - \frac{3}{2}i) =$ R: (-i)
 f) $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2} + i) + (\frac{\sqrt{2}}{2} - i) =$ R: ($\sqrt{3} + \sqrt{2}$)

Ejercicio 15: Multiplicación y División de Números Complejos:

- a) $(10 + 2i) \cdot (3 + 15i) =$ R: (156i)
 b) $(-5 + 2i) \cdot (5 + 2i) =$ R: (-29)
 c) $(-1 + i) \cdot (-1 - i) =$ R: (2)

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & -\frac{3}{5}i \cdot \frac{4}{3}i = & \text{R: } (4/5) \\
 \text{e)} \quad & (\sqrt{2} + \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}i) = & \text{R: } (5i) \\
 \text{f)} \quad & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + 4i\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\right) = & \text{R: } (1 + 6i) \\
 \text{g)} \quad & (-4 + 2i) : (1 + i) = & \text{R: } (-1 + 3i) \\
 \text{h)} \quad & (-1 + i) : (-1 - i) = & \text{R: } (-i) \\
 \text{i)} \quad & (4 + 2i) : i = & \text{R: } (2 - 4i) \\
 \text{j)} \quad & \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}i\right) : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}i\right) = & \text{R: } (i) \\
 \text{k)} \quad & (\sqrt{2} + \sqrt{3}i) : (\sqrt{2} - \sqrt{3}i) = & \text{R: } \left(-\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}i\right)
 \end{aligned}$$

Ejercicio 16: Potencia de Números Complejos

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & i^{60} = & \text{b)} \quad & i^{602} = \\
 \text{c)} \quad & i^{77} = & \text{d)} \quad & i^{104} = \\
 \text{e)} \quad & (-i)^{257} = & \text{f)} \quad & (-i)^{13} = \\
 \text{g)} \quad & (1 + i)^2 = & \text{h)} \quad & (4 - 3i)^2 = & \text{R: } (7 - 24i) \\
 \text{i)} \quad & \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}i\right)^2 = & \text{R: } \left(-\frac{9}{100} + \frac{2}{5}i\right) & \text{j)} \quad & \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{5}i\right)^2 = & \text{R: } \left(-\frac{341}{1225} + \frac{12}{35}i\right) \\
 & & & & & \text{R: } (2i)
 \end{aligned}$$

Ejercicio 17: Ejercicios combinados en C

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{(1 + 2i)^2 i^{47}}{(3 - 2i) - (2 + i)} = & \text{R: } \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) & \text{d)} \quad & \frac{2 - 2i^3}{3 - i^5} + \frac{-2i}{1 - i} = \\
 \text{b)} \quad & \frac{i^{-253}(3 + 2i) - (3 - 2i)}{(4 + 2i) + (-2 + i)} = & \text{R: } \left(\frac{-5 + i}{13}\right) & \text{e)} \quad & \frac{2i}{(1 - i)^2} + \frac{(1 + i)^2}{2i} = \\
 \text{c)} \quad & \frac{(2 + i)^{-1} \cdot (2 + i)^2}{i^{39} \cdot (3 - 2i)} = & \text{R: } \left(\frac{-7 + 4i}{13}\right) & \text{f)} \quad & \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2}{1 - i} =
 \end{aligned}$$

Ejercicio 18: Ecuaciones en C: Hallar el valor de z

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & z \cdot (2 - 3i) + (-2 - i) = 3 - 2i & \text{R: } (1 + i) \\
 \text{b)} \quad & (-1, -2) - z = (1, -1) & \text{R: } (-2, -1) \\
 \text{c)} \quad & (2, -3) + z = (-1, 2) & \text{R: } (-3, 5) \\
 \text{d)} \quad & (-2, \sqrt{2}) + z = (-2, 3\sqrt{2}) - z & \text{R: } (0, \sqrt{2}) \\
 \text{e)} \quad & (1 - i) \cdot z = -1 + i & \text{R: } (-1) \\
 \text{f)} \quad & \frac{z + (2, -1)}{(2, -2)} = (2, 2) & \text{R: } (6, 1) \\
 \text{g)} \quad & (2, -2) \cdot z - (8, -2) = (0, 2) & \text{R: } (2, 2) \\
 \text{h)} \quad & \frac{(\sqrt{3}, -\sqrt{3})}{z} + (1, 0) = (\sqrt{3} + 1, \sqrt{3}) & \text{R: } (0, -1) \\
 \text{i)} \quad & 2i + z = 3 - i & \text{R: } (3 - 3i) \\
 \text{j)} \quad & (2 - 3i) \cdot z = (2 + 3i) \cdot i & \text{R: } \left(-\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i\right) \\
 \text{k)} \quad & 2 + i + 3z = 2 - i & \text{R: } (-2/3i)
 \end{aligned}$$

$$l) \frac{1+i}{z} - (1+2i) = i$$

$$ll) \frac{z+1}{z-1} = 2+i$$

$$m) \frac{zi}{z+i} = 1+2i$$

$$n) \frac{2-i}{z-1} = 1+2i$$

$$o) \frac{z+2i}{z-i} = \sqrt{2} i$$

$$p) z \sqrt{3} = z i - (\sqrt{3} - i)$$

$$R: \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)$$

$$R: (2-i)$$

$$R: \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)$$

$$R: (1-i)$$

$$R: (\sqrt{2})$$

$$R: (-1)$$