Profesor: Isaías Correa M.

Guía de "Números Complejos"

Ejercicio 1: Marque con una cruz todos los conjuntos numéricos a los cuales pertenecen las soluciones de las ecuaciones:

Ecuación	Resolución	N	Z	Q	I	R	Q^*	C
$x - 3 = 1$								
$x + 2 = 1$								
$x \cdot 2 = -1$								
$x^2 - 2x = 0$								
$x^2 + 1 = 0$								
$x^2 + 1 = \sqrt{2}$								
$x^2 + x + 7 = 0$								

Como sabemos, en R no podemos resolver raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a –1.

Para eso definimos el símbolo **i** para indicar un número tal que: $\boxed{\mathbf{i^2 = -1}}$ **ó** $\boxed{\mathbf{i} = \sqrt{-1}}$

Teniendo en cuenta la igualdad a partir de la cual lo definimos, y que este número no es real, podemos usarlo para expresar las soluciones que no son reales de algunas ecuaciones.

Ej: $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x_1 = i \qquad x_2 = -i$

Ya que: $i^2 + 1 = 0$ y $(-i)^2 + 1 = 0$

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$

$x_1 = \sqrt{2}\, i \qquad x_2 = -\sqrt{2}\, i$

Ya que: $(\sqrt{2}\, i)^2 + 2 = 0$ y $(-\sqrt{2}\, i)^2 + 2 = 0$

Ejercicio 2: Utilice el símbolo i para expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 + 5 = 0$ c) $x^2 - 10 = 2x^2$

d) $-x^2 - 9 = 0$ e) $9x^2 + 16 = 0$ f) $(x + 5)^2 = 10x$

g) $\frac{1}{x^2 + 4} - 1 = 1$ h) $(x - 2)(-x - 2) = 20$ i) $(x - 8)^2 = -16x$

j) $3(2 - 2x) = (x - 4)(x - 2)$ k) $(2x^2 - 1)^2 = (1 + 2x)(1 - 2x) - 1$

Ejercicio 3: Calcular las siguientes potencias:

a) $i^{127} =$ b) $i^{94} =$ c) $i^{33} . i^{11} =$

d) $i^{44} =$ e) $(i^{12})^4 =$ f) $i^{2022} : i^3 =$

g) $i^{242} =$ h) $(i^3)^5 =$ i) $x + 1 = i^{27}$ x=?

j) $i^{69} =$ k) $(i^9)^{27} =$ l) $x - i = i^{-3}$ x=?

m) $i^3 \cdot i^7 \cdot i^{-2} =$ n) $2i^5 + 3i^6 + i^7 + 4i^8 =$ ñ) $i^{11} + i^{12} + \ldots\ldots + i^{37} + i^{38} =$

o) $i^{23} \cdot i^{24} \cdot i^{25} \cdots i^{77} =$ p) $(i^5 - i^{17})(i^6 - i^{13} + i) =$ q) $i^{1253} - i^{2178} =$

Los números complejos

A los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, los llamamos *números complejos*.

$z = a + bi$

Se suele utilizar la letra z para designar un número complejo.

i verifica que $i^2 = -1$

a se llama *parte real* de z.
Lo escribimos así:
$a = Re(z)$

b se llama *parte imaginaria* de z.
Lo escribimos así:
$b = Im(z)$

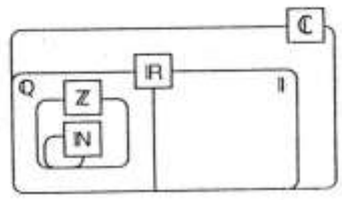
Ejemplos:

$z_1 = 2 - 3i$ $\quad Re(z_1) = 2 \quad Im(z_1) = -3$

$z_2 = \frac{2}{3}i$ $\quad Re(z_2) = 0 \quad Im(z_2) = \frac{2}{3}$

$z_3 = -5$ $\quad Re(z_3) = -5 \quad Im(z_3) = 0$

Al conjunto de todos los números complejos lo designamos con el símbolo $\mathbb{C}$, y está definido de forma tal que incluye a los números reales, representados por aquellos números complejos cuya parte imaginaria es nula.
Un número complejo no nulo como z_2, cuya parte real es nula, se llama *imaginario puro*.



Ejercicio 4: Complete la siguiente tabla:

Número Complejo Z	Parte Real Re (z)	Parte Imaginaria Im(z)	¿es complejo, real o imaginario puro?
5 + 3 i			
	2	8	
	– 4	2/3	
	1	–3	
$2 - \sqrt{3}\ i$			
5 i			
	0	4	
	4	0	
	0	0	

CONJUGADO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

A partir de un número complejo z = a + bi, se definen los siguientes:
* El conjugado de z es $\overline{z} = a - bi$ (la parte real es igual y la parte imaginaria es opuesta)
* El opuesto de z es $-z = -a - bi$ (la parte real y la parte imaginaria son opuestas)
Ejemplos:

$z_1 = -1 - 2i$ $\qquad \overline{z_1} = -1 + 2i$ $\qquad -z_1 = 1 + 2i$

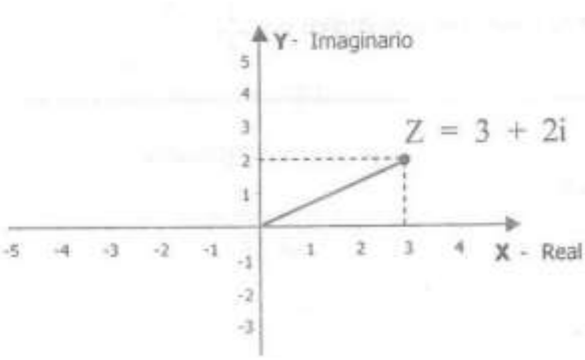
$z_2 = 4i$ $\qquad \overline{z_2} = -4i$ $\qquad -z_2 = -4i$

$z_3 = 6 - i$ $\qquad \overline{\overline{z_3}} = 6 - i$ $\qquad -\overline{z_3} = -6 - i$

Ejercicio 5: Si $z_1 = 2 + 5i$ $\quad z_2 = i - 4$ $\quad z_3 = -5$ $\quad z_4 = 3i$, determine:

1) $-z_1 =$ $\qquad$ 2) $\overline{z_3} =$ $\qquad$ 3) $\overline{\overline{z_4}} =$ $\qquad$ 4) $\overline{-z_2} =$ $\qquad$ 5) $-\overline{z_2} =$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN N° COMPLEJO



En el eje de abscisas (el de las X), se representa la componente Real y en el eje de ordenadas (el de las Y), se representa la imaginaria:

El punto (a, b) determina con el origen de coordenadas un vector, al que llamaremos **Vector Posición** del Número Complejo a + bi

Ejercicio 6: Representar los siguientes números complejos:

$z_1 = -1 - i$ $\qquad$ $z_2 = -3 + 2i$ $\qquad$ $z_3 = 2 - 3i$

Ejercicio 7: Dado $z = 5 - 3i$, graficar $z, -z, \bar{z}, \overline{-z}$. ¿Qué relación existe entre ellos?

MÓDULO Y ARGUMENTO

El Módulo de un Número Complejo z = a + bi es la longitud del Vector Posición.
El Módulo Se designa entre barras verticales |Z| y se calcula usando el Teorema de Pitágoras: $Z = a + bi \Rightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

El **Argumento** (α) de un Complejo z = a + bi, es el ángulo que forma el eje (positivo) X con el Vector Posición de Z. Se calcula mediante la expresión: $Z = a + bi \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

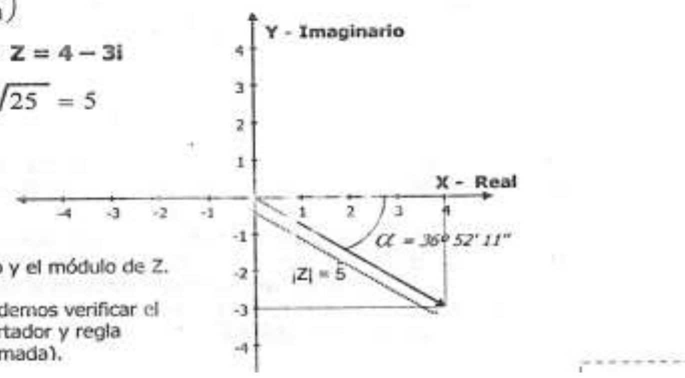
Ejemplo: Calculamos el Módulo y el Argumento de Z = 4 – 3i

$Z = 4 - 3i \Rightarrow |Z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$Z = 4 - 3i \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = -36°52'11''$

Y acá lo vemos todo graficado. Podemos ver el argumento y el módulo de Z.

Nota. Si hacemos el dibujo a escala 1 unidad = 1 cm, podemos verificar el valor del argumento y módulo midiendo con transportador y regla respectivamente (obviamente en forma aproximada).



Ejercicio 8: Hallar el módulo y el argumento de los siguientes complejos y graficarlos:

a) 5 – 2 i $\qquad$ b) –3 + ½ i $\qquad$ c) ⅔ + i $\qquad$ d) – 1 – i

FORMAS DE REPRESENTAR UN NÚMERO COMPLEJO

* **Forma Binomial: z = 2 + 3 i**

* **Forma Cartesiana: z = (2 , 3)**

* **Forma Polar: z = (|z| , α) donde |z| es el módulo , α el argumento**

$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; $\alpha = \operatorname{arctg}(3/2) = 56°18'35''$

$z = (\sqrt{13}, 56°18'35'')$

* **Forma Trigonométrica: z = |z|· (cos α + i sen α) |z| módulo**
α argumento

$z = \sqrt{13} \cdot (\cos 56°18'35'' + i \operatorname{sen} 56°18'35'')$

Verificamos : $z = 3{,}605 \cdot (0{,}554 + i\, 0{,}832)$
$z = 1{,}999\ldots + 2{,}999\ldots i \approx$ (aprox 2 + 3i)

Ejercicio 9: Expresar los siguientes complejos en forma polar:

a) z = – 3 i $\qquad$ b) z = – 2 – 5 i $\qquad$ c) $z = (-2; -2)$ d) $z = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Ejercicio 10: Expresar en forma trigonométrica los n° complejos del ej 8

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En los siguientes ejemplos pueden observar cómo sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números complejos:

Suma: (2 + 3 i) + (1 – 5 i) = (2 + 1) + (3 – 5) i = 3 – 2 i

Resta: (2 + 3 i) – (1 – 5 i) = (2 – 1) + (3 –(–5) i) = 1 + 8 i

Multiplicación: (2 + 3 i) . (1 – 5 i) = 2 . 1 + 2 . (–5i) + 3 i.1 + 3i .(–5i) =
= 2 – 10 i + 3 i – 15 i² = 17 – 7 i
(recordar que **i² = –1**)

División:
Para resolver la división de dos números complejos, siendo el divisor no nulo, multiplicamos a ambos por el conjugado del divisor, del siguiente modo:

$$\frac{2+3i}{1-5i} = \frac{2+3i}{1-5i}\cdot\frac{1+5i}{1+5i} = \frac{2+10i+3i+15i^2}{1^2-(5i)^2} = \frac{-13+13i}{1+25} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Multiplicar por una fracción de igual numerador y denominador es como multiplicar por 1, por lo tanto, la igualdad no se altera.

Ejercicio 11: Consideren los complejos: $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 + 5i$; $z_3 = 4 - i$ y resuelvan las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2 - z_3 =$ b) $z_1 + \overline{z_2} - z_3 =$ c) $\overline{z_1} - \overline{z_3} =$ d) $5.\ z_3 =$

e) $(z_1 + z_2).\ z_3 =$ f) $(-z_1 + \overline{z_2}).(\overline{z_1} - z_3) =$ g) $z_1 .\ z_2 - z_3 =$ h) $(z_3)^2 =$

Ejercicio 12: Consideren los complejos: $z_1 = 3 - i$; $z_2 = -4i$; $z_3 = 7 + 2i$ y resuelvan las siguientes divisiones:

a) $\frac{z_2}{z_1} =$ b) $\frac{z_1}{z_3} =$ c) $\frac{z_3}{z_2} =$ d) $\frac{z_2}{z_3} =$ e) $16.\frac{\overline{z_3}}{z_2} =$ f) $\frac{1}{z_1} =$

Ejercicio 13: Completen las potencias de i:

$i^0 =$ $i^1 =$ $i^2 =$ $i^3 =$

$i^4 =$ $i^5 =$ $i^6 =$ $i^7 =$

¿Qué regularidad observan?

☆ Regla para elevar (i) a cualquier potencia ⇨ **Hay que dividir la potencia de i por 4, y luego elevamos la i al resto de la división:**

Ejemplo: $i^{322} = i^{\text{resto de la división}} = i^{\boxed{2}} = -1$

Siempre hay que dividir por 4. Y queda siempre i elevada a lo que nos dio el resto de la división.

$$\begin{array}{r|l} 322 & 4 \\ \hline 02 & 80 \\ \boxed{2} & \end{array}$$

Ejercicio14): ***Adición y Sustracción de Números Complejos***:

a) (10 + 3 i) + (8 + 2 i) + (4 + 5 i) = R: (22, 10)

b) (7 + 5 i) – (3 – 4 i) – (– 5 + 2 i) = R: (9 , 7)

c) (1 + ½ i) + (3 – 3/2 i) + (– 4 + i) = R: (0)

d) $(-8+\frac{3}{5}i)+(-\frac{7}{4}+\frac{7}{10}i)+(-\frac{1}{4}-\frac{3}{10}i)=$ R: (– 10 + i)

e) $(\frac{2}{5}+i)+(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}i)+(\frac{2}{15}+\frac{1}{4}i)+(-\frac{28}{15}-\frac{3}{2}i)=$ R: (– i)

f) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2}+i)+(\frac{\sqrt{2}}{2}-i)=$ R: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

Ejercicio 15***: Multiplicación y División de Números Complejos:***

a) (10 + 2 i) . (3 + 15 i) = R: (156 i)

b) (– 5 + 2 i) . (5 + 2 i) = R: (– 29)

c) (– 1 + i) . (– 1 – i) = R: (2)

d) $-\frac{3}{5}i.\frac{4}{3}i=$ R: (4/5)

e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}\ i).(\sqrt{3}+\sqrt{2}\ i)=$ R: (5 i)

f) $(\frac{\sqrt{2}}{2}+i).(\frac{2}{3}+4i).(\frac{\sqrt{2}}{2}-i)=$ R: (1 + 6 i)

g) (– 4 + 2 i) : (1 + i) = R: (– 1 + 3 i)

h) (– 1 + i) : (– 1 – i) = R: (– i)

i) (4 + 2 i) : i = R: (2 – 4 i)

j) $(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}i):(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}i)=$ R: (i)

k) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i):(\sqrt{2}-\sqrt{3}\ i)=$ R: $(-\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}i)$

<u>Ejercicio16</u>: *Potencia de Números Complejos*

a) $i^{60} =$ 　　b) $i^{602} =$

c) $i^{77} =$ 　　d) $i^{104} =$

e) $(-i)^{257} =$ 　　f) $(-i)^{13} =$

g) $(1 + i)^2 =$ (R: 2i) 　　h) $(4 - 3i)^2 =$ (R: 7 – 24 i)

i) $(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} i)^2 =$ (R: $-\frac{9}{100} + \frac{2}{5} i$) 　　j) $(\frac{2}{7} + \frac{3}{5} i)^2 =$ (R: $-\frac{341}{1225} + \frac{12}{35} i$)

<u>Ejercicio 17</u>: *Ejercicios combinados en C*

a) $\frac{(1+2i)^2 . i^{47}}{(3-2i)-(2+i)} =$ (R: $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$)

b) $\frac{i^{-253}(3+2i)-(3-2i)}{(4+2i)+(-2+i)} =$ (R: $\frac{-5+i}{13}$)

c) $\frac{(2+i)^{-1}.(2+i)^2}{i^{39}.(3-2i)} =$ (R: $\frac{-7+4i}{13}$)

d) $\frac{2-2i^3}{3-i^5} + \frac{-2i}{1-i} =$

e) $\frac{2i}{(1-i)^2} + \frac{(1+i)^2}{2i} =$

f) $\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)^2}{1-i} =$

<u>Ejercicio 18</u>: *Ecuaciones en C: Hallar el valor de z*

a) z . (2 – 3 i) + (– 2 – i) = 3 – 2 i 　　R: (1 + i)

b) (– 1 , – 2) – z = (1 , – 1) 　　R: (–2, –1)

c) (2 , – 3) + z = (–1 , 2) 　　R: (– 3 , 5)

d) $(-2, \sqrt{2}) + z = (-2, 3\sqrt{2}) - z$ 　　R: $(0, \sqrt{2})$

e) (1 – i) . z = – 1 + i 　　R: (– 1)

f) $\frac{z+(2,-1)}{(2,-2)} = (2, 2)$ 　　R: (6 , 1)

g) (2 , – 2) . z – (8 , – 2) = (0 , 2) 　　R: (2 , 2)

h) $\frac{(\sqrt{3}, -\sqrt{3})}{z} + (1, 0) = (\sqrt{3} + 1, \sqrt{3})$ 　　R: (0 , – 1)

i) 2 i + z = 3 – i 　　R: (3 – 3 i)

j) (2 – 3 i) . z = (2 + 3 i) . i 　　R: $(-\frac{12}{13} - \frac{5}{13} i)$

k) 2 + i + 3 z = 2 – i 　　R: (– 2/3i)

l) $\frac{1+i}{z} - (1 + 2i) = i$ 　　R: $(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} i)$

ll) $\frac{z+1}{z-1} = 2 + i$ 　　R: (2 – i)

m) $\frac{zi}{z+i} = 1 + 2i$ 　　R: $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i)$

n) $\frac{2-i}{z-1} = 1 + 2i$ 　　R: (1 – i)

o) $\frac{z+2i}{z-i} = \sqrt{2}\ i$ 　　R: $(\sqrt{2})$

p) $z\sqrt{3} = z i - (\sqrt{3} - i)$ 　　R: (–1)